Μαθημα 12ο 24/5/2017

Τοπολογια

Υπενθυμιση

(E_1,ρ_1), (E_2,ρ_2) μ.χ, $f: E_1 \to E_2$ και $x \in E_1$:

f συνεχης στο $x \overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} [(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_x > 0)(\forall y \in E_1): \rho_1(x,y) < \delta_x$
$\Rightarrow \rho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon]$

Ορισμος (ομοιομορφη συνεχεια)

f ομοιομορφα συνεχης $\Leftrightarrow [(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x,y \in E_1): \rho_1(x,y) < \delta$
$\Rightarrow \rho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon]$

Παραδειγμα

$f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$, f συνεχης

Θδο η f δεν ειναι ομοιομ. συνεχης

Λυση

Υποθετουμε οτι η f ειναι ομοιομ. συνεχης. Τοτε για $\varepsilon = 1$

υπαρχει $\delta > 0$: $(\forall x,y \in (0,+\infty)) : |x-y| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < \varepsilon = 1$

Παιρνω $0 < z < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\delta}{2}\right\}$

$|2z - z| = z < \frac{\delta}{2} < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{2z} - \frac{1}{z}\right| = \frac{1}{2z} > 1$ ατοπο.

γιατι $z < \frac{1}{2} \Rightarrow 2z < 1 \Rightarrow \frac{1}{2z} > 1$

Η συναρτηση αυτη ειναι συνεχης αλλα οχι ομοιομ. συνεχης

→ Σπιτι

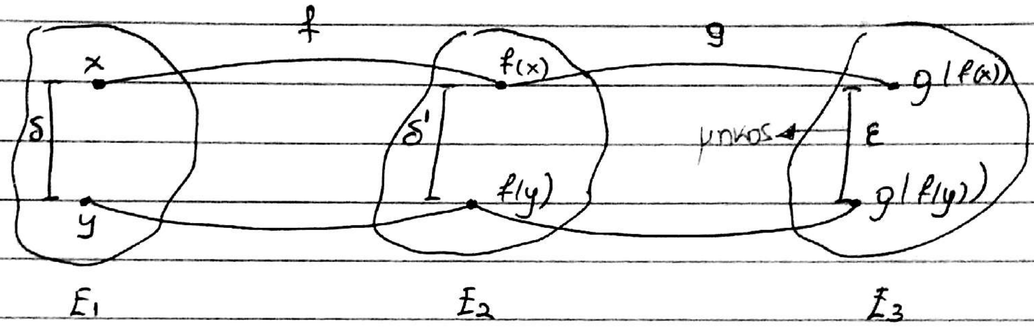
Σαν εφαρμογη κανω το ιδιο π.χ αλλα περιοριζω την f στο $[1,2]$, δηλ $f|_{[1,2]}$, υπαρχει και στο βιβλιο σελ 124

Προταση

Η συνθεση δυο ομοιομορφα συνεχων συναρτησεων ειναι συνεχης συναρτηση

Αποδειξη

$f: E_1 \to E_2$ και $g: E_2 \to E_3$ δυο ομοιομ. συνεχεις συναρτησεις



Θδο η $g \circ f: D(g \circ f) \to E_3$ ομοιομ. συνεχης

Θεωρουμε ενα τυχαν $\varepsilon > 0$

Επειδη g ομοιομ. συνεχης:

$(\exists \delta' > 0)(\forall z, w \in D(g)): \rho_2(z, w) < \delta' \Rightarrow \rho_3(g(z), g(w)) < \varepsilon$ (1)

Επειδη f ομοιομ. συνεχης:

$(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in E_1): \rho_1(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(y)) < \delta'$ (2)

Τοτε μπορω να πω οτι

$$(\forall x, y \in E_1): \rho_1(x, y) < \delta \underset{\substack{z = f(x) \\ w = f(y)}}{\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow}} \rho_3(g(f(x)), g(f(y))) < \varepsilon$$

και ετσι η αποδειξη ειναι πληρης

$(E_1, \rho_1), \dots, (E_n, \rho_n)$ καρτεσιανοι μ.χ και $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$
παιρνοντας δυο στοιχεια $E \ni x = (x_1, \dots, x_n)$, $E \ni y = (y_1, \dots, y_n)$
τοτε μπορω να ορισω οτι:

$$\rho(x,y) = \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1) + \dots + \rho_n^2(x_n,y_n)}$$

Ετσι ο (E, ρ) εφοδιασμενος με αυτη τη πραξη λεγεται χαρτεσιανος μ.χ

$p_1 : E \to E_1$, $p_1(x_1, \dots, x_n) = x_1$ (1^{ε} προβολη)
Θδο οι προβολες ενος καρτ. μ.χ ειναι ομοιομ. συνεχεις συν.

Λημμα
$(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2)$ μ.χ, $f : E_1 \to E_2$ τοτε ισχυει το εξης
$(\exists c > 0) : \rho_2(f(x), f(y)) \leq c \cdot \rho_1(x,y)$ (Συναρτησεις Lipschitz)
Αποδειξη
Παιρνω ενα $\varepsilon > 0$ τοτε $\exists\, \delta = \frac{\varepsilon}{c}$
$\rho_1(p_1(x), p_1(y)) = \rho_1(x_1, y_1) = \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1)} \leq \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1) + \dots + \rho_n^2(x_n,y_n)} =$
$= 1 \cdot \rho(x,y)$ δηλ. $\rho_1(p_1(x), p_1(y)) \leq 1 \cdot \rho(x,y)$ για
$c = 1$ δηλ. ικανοποιειται η σχεση
Αρα ειναι ομοιομ. συνεχης

p_J προβολη, $J = \{J_1, \dots, J_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$
$p_J(x) = p_J(x_1, \dots, x_n) = (x_{J_1}, \dots, x_{J_k})$

$$\rho_J(p_J(x), p_J(y)) = \sqrt{\rho_{J_1}^2(x_{J_1}, y_{J_1}) + \dots + \rho_{J_k}^2(x_{J_k}, y_{J_k})} \leq$$

$$\leq \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1) + \dots + \rho_n^2(x_n,y_n)} = \rho(x,y)$$

Δηλ. $\rho_J(p_J(x), p_J(y)) \leq \underbrace{1}_{c} \cdot \rho(x,y)$ αρα ομοιομ. συν

Αρα ολες οι προβολες ειναι ομοιομ. συνεχεις συν.

Ορισμος

$(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2)$ μ.χ., $f: E_1 \xrightarrow[\text{αμφ}]{\text{επι}} E_2$, f ομοιομορφισμος

$\overset{\text{ορ}}{\iff} f, f^{-1}$ συνεχεις συναρτησεις

Ορισμος

$f: E_1 \to E_2$ ισομετρια $\overset{\text{ορ}}{\iff} (\forall x, y \in E_1): \rho_2(f(x), f(y)) = \rho_1(x, y)$

Προταση

$(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2)$ μ.χ και $f: E_1 \xrightarrow{\text{επι}} E_2$ μια ισομετρια. Τοτε

i) f αμφιμονοσημαντη   iii) f^{-1} ισομετρια

ii) f ομοιομ. συνεχης   iv) f ομοιομορφισμος

Αποδειξη

$f: E_1 \xrightarrow{\text{επι}} E_2$

i) Εστω $f(x) = f(y) \Rightarrow \rho_2(f(x), f(y)) = 0 \overset{f \text{ ισομ}}{\Longrightarrow} \rho_1(x, y) = 0$

$\Rightarrow x = y$. Αρα αμφιμονοσημαντη

ii) $\rho_2(f(x), f(y)) = \underbrace{1}_{c} \cdot \rho_1(x, y)$ αρα ομοιομ. συνεχης (προφανη)

iii) $f^{-1}: E_2 \xrightarrow{\text{επι}} E_1$, δηλ. οδο $\rho_1(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) = \rho_2(z, w)$

για να ειναι ισομετρια

$z, w \in E_2 \overset{f \text{ επι}}{\Longrightarrow} (\exists x, y \in E_1): f(x) = z, f(y) = w$

και επειδη f ισομετρια $\Rightarrow \rho_2(f(x), f(y)) = \rho_1(x, y)$ και

ακομη $f^{-1}(z) = w$, $f^{-1}(w) = y$ αρα αυτο μας δινει

τελικα: $\rho_2(z, w) = \rho_1(f^{-1}(z), f^{-1}(w))$. Αρα ισομετρια

iv) (E, ρ) $\rho: E \times E \to \mathbb{R}$. O $E \times E$ καρτεσ. μ.χ των μ.χ

$(E, \rho), (E, \rho)$ τοτε $|\rho(x) - \rho(y)| = |\rho(x_1, x_2) - \rho(y_1, y_2)|$ με

$x = (x_1, x_2) \in E \times E$, $y = (y_1, y_2) \in E \times E$

$|\rho(x_1,y_1) - \rho(y_1,y_2)| \leq \rho(x_1,y_1) + \rho(x_2,y_2) \overset{(3)}{<} \varepsilon$ (++)

$d(x,y) = \sqrt{\rho^2(x_1,y_1)+\rho^2(x_2,y_2)} < \delta$

$$\left.\begin{aligned} \rho(x_1,y_1) &= \sqrt{\rho^2(x_1,y_1)} \leq \sqrt{\rho^2(x_1,y_1)+\rho^2(x_2,y_2)} < \delta \\ \rho(x_2,y_2) &= \sqrt{\rho^2(x_2,y_2)} \leq \sqrt{\rho^2(x_1,y_1)+\rho^2(x_2,y_2)} < \delta \end{aligned}\right\} (+)$$

Άρα (++) $\underset{(+)}{<} 2\delta = \varepsilon$ $(\forall \varepsilon>0)$ $(\exists \delta = \varepsilon/2)$

! $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ δυο ακολουθιες με $x_\nu \to x_0$, $y_\nu \to y_0$
τοτε $\rho(x_\nu,y_\nu) \to \rho(x_0,y_0)$ (μπορω να το δειξω)

↓ Νικολιδακης ↓

Πεμπτη 27/4, ωρα $13^{00}-15^{00}$ αναπληρωση
(extra μονο ασκησεις)

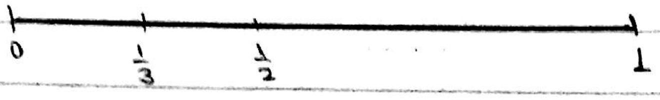
Προταση
Εστω (E,ρ) μ.χ με $\emptyset \neq A \subseteq E$, $\ell \in E$
$\ell \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in A$ $\forall n\in\mathbb{N}$: $a_n \xrightarrow{\rho} \ell$

Αποδειξη
$(\Rightarrow)$ Υποθετω οτι $\ell \in \bar{A} \Rightarrow (\forall \varepsilon>0)$ $B(\ell,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset$
$\forall n\in\mathbb{N}$ $B(\ell,1/n)\cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, a_n \in B(\ell,1/n)\cap A$
$\Rightarrow a_n \in A$: $\rho(a_n,\ell) < \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow a_n \xrightarrow{\rho} \ell$

$(\Leftarrow)$ Εστω οτι ℓ εχει την ιδιοτητα να $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$:
$a_n \xrightarrow{\rho} \ell$ (1) δδο $\ell \in \bar{A}$. Άρα αρκει $\forall \varepsilon>0$: $B(\ell,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset$
(1) $\Rightarrow \rho(a_n,\ell) \to 0 \Rightarrow$ αν $\varepsilon>0$ $\exists n_0(\varepsilon) = n_0$ τ.ω να ισχυει
$\rho(a_n,\ell) < \varepsilon$ $\forall n\geq n_0 \Rightarrow a_n \in B(\ell,\varepsilon)$ $\forall n \geq n_0$
Επιπλεον $a_n \in A$ $\forall n$ αρα $\underbrace{B(\ell,\varepsilon)}_{\text{περιεχει ολα τα } a_n\ \forall n\geq n_0} \cap A \neq \emptyset$

Πx

$A=\{0\}\cup\{1/n,\ n=1,2,\dots\}=\{0,1,1/2,1/3,\dots\}$



$A\subseteq \bar{A}$

$A=\bar{A}=A\cup A'$, $A'=\{0\}$

Πρόταση

$\emptyset\neq A\subseteq E$, $\ell\in E$ και (E,ρ) μχ

$\ell\in A' \Leftrightarrow$ "$\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ · $a_n\in A$ ώστε $a_n\xrightarrow{\rho}\ell$ και $a_n\neq a_m$ για $\forall n\neq m$" ① (Δηλ. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διακεκριμένοι όροι)

Απόδειξη

(⇐) Θδο $\ell\in A'$ με Υποθ. ①

Αρκεί νδο $B(\ell,\varepsilon)\cap A$ άπειρο $\forall\varepsilon>0$ ②

Έστω $\varepsilon>0$ έχουμε από ① $a_n\xrightarrow{\rho}\ell$, $a_n\in A$ με $a_n\neq a_m$ $\forall n\neq m$ ③

$\Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}$: $\rho(a_n,\ell)<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0 \overset{③}{\Rightarrow}$ ②

$\Rightarrow a_n\in A\cap B(\ell,\varepsilon)$ $\forall n\geq n_0$

(⇒) Υποθέτω ότι $\ell\in A' \Rightarrow B(\ell,\frac{1}{n})\cap A$ άπειρο

για $n=1 \Rightarrow B(\ell,1)\cap A$ άπειρο άρα $\neq\emptyset$

$\Rightarrow \exists a_1\in B(\ell,1)\cap A$

για $n=2 \Rightarrow B(\ell,1/2)\cap A$ άπειρο $\Rightarrow \exists a_2\neq a_1$ έτσι ώστε

$a_2\in B(\ell,1/2)\cap A$

Επαγωγικά αν $a_k \in B(\ell, 1/k) \cap A$ $\forall k = 1,2,\dots,n$ έχουμε διαλέξει με διαφορετικούς ανά 2 όρους στο A $a_i \neq a_j$ $\forall i \neq j$ με $i,j = 1,2,\dots,n$

$B(\ell, 1/n+1) \cap A$ άπειρο αφού $\ell \in A'$
Άρα $\exists\, a_{n+1} \in B(\ell, 1/n+1) \cap A$ και το $a_{n+1} \notin \{a_1, \dots, a_n\}$
Άρα κατασκευάσαμε $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n \in \underbrace{B(\ell, 1/n)}_{\oplus}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
και $n \neq m \Rightarrow a_n \neq a_m$
$\oplus \Rightarrow \rho(a_n, \ell) < \frac{1}{n} \to 0$ αυτό που ήθελα

Παράδειγμα
$A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n},\ n = 1,2,\dots\}$

$\bar{A}$ = όριο ακολ. με στοιχεία από το $A = A$
A' = όρια διακεκρ. ακολ με στοιχεία με σ.σ από το A

Πρόταση
Έστω (E,ρ) μ.χ, $A \subseteq E$ και $\neq \emptyset$ τότε το A είναι κλειστό
$\Leftrightarrow$ " $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ με $a_n \to \ell \Rightarrow \ell \in A$ " ①
Απόδειξη
($\Rightarrow$) προφανές
Έστω ότι A κλειστό $\Rightarrow \bar{A} = A$
Έστω $a_n \in A$: $a_n \to \ell \Rightarrow \ell \in \bar{A} = A \Rightarrow \ell \in A$

($\Leftarrow$) ① $\Rightarrow \bar{A} = A$
Προφανώς $A \subseteq \bar{A}$ δ.δ.ο $\bar{A} \subseteq A$
Έστω $\ell \in \bar{A}$ δ.δ.ο $\ell \in A$
$\ell \in \bar{A} \Rightarrow \exists\, (a_n)_n \subseteq A : a_n \to \ell \overset{①}{\Rightarrow} \ell \in A$

Εφαρμογη

$A = C(a,r) = \{x \in E : \rho(x,a) \leq r\}$

$a \in E$, (E,ρ) μ.χ Δ.Ο $C(a,r)$ ειναι κλειστο συνολο

Λυση

Θεωρω τυχαια $(a_n)_n \subseteq C(a,r)$ με $\underbrace{a_n \to \ell}_{\text{Υπ.Θ}}$

Θδο $\ell \in C(a,r)$

$a_n \in C(a,r) \Rightarrow \rho(a_n, a) \leq r$ Θδο $\ell \in C(\alpha, r)$

δηλ. οτι $\rho(\ell, a) \leq r$

$\rho(\ell, a) \leq \rho(\ell, a_n) + \rho(a_n, a) \leq \rho(\ell, a_n) + r$ (1)

παιρνοντας ορια στην (1) εχω

$\rho(\ell, a) \leq 0 + r = r \Rightarrow \ell \in C(\alpha, r)$

Εχω το ζητουμενο